9, tétel

Síkba-, gömbberajzolhatóság, euler-féle poliéder tétel

Síkbarajzolható és síkbarajzolt gráfok, tartomány. Gráfok gömbre rajzolhatósága, sztereografikus projekció, és ezek következményei. Duális kézfogáslemma, (általánosított) Euler-féle poliédertétel.

**Def. sr:** síkbarajzolt gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amelynek élei nem keresztezik egymást. A G gráf síkbarajzolható ha van síkbarajzolt diagramja.

**Def. tartományok:** Egy síkbarajzolható gráf tartományai a gráf egy adott síkbeli ábrázolásában azok a síkbeli, összefüggő, nyílt részek (régiók), amelyeket a gráf élei határolnak. Ezek tartalmazhatnak:

1, belső tartományokat, amit a gráf élei teljesen körülzárnak

2, külső tartományt, ami a végtelen sík felé nyitott, és nem teljesen zárják körbe a gráf élei.

Nem csak egyszerű gráf lehet SR, az SR gráf egy konkrét diagram, de több fajta ábrázolása lehet

Gömbre rajzolhatóság definíciója is hasonlóan definiálható, mint a síkbarajzolhatóság.

Áll: G gráf síkbarajzolható<==>G gömbre rajzolható

**Sztereografikus projekció:** a gömb ”északi sarkáról” történő vetítés kölcsönösen egyértelm megfeleltetés a sík pontjai és a síkot ”déli sarkon” érintő gömbfelszín pontjai között(északi sark kivétel).

BIZ:

A síkba rajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz, és az északi sarkot nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik, viszont az északi sarkot szigorúan nem vesszük a gömb „rajzolható felületéhez”.

**Ebből következik:**

**az SR gráf külső tartományának nincs külön szerepe.**

BIZ: rajzoljunk gömbre egy gráfot, majd az északi sarkot jelöljük ki más és más tartományok belsejében, majd síkravetítésnél ekkor más és más tartomány lesz a külső tartonány, pontosan az amelyikbe tettük az északi sarkot.

**Bármely konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.**

BIZ: Bármely konvex poliéder élhálója a poliéder belső ponjtából gömbre vetíthető, tehát gömbről meg síkbarajzolható. (a test lapjai a tartományoknak felelnek meg.)

**n=csúcsok száma, e= élek száma, t=tartományok száma, k=komponensek száma**

**Duális kézfogáslemma:**

Ha G gráf síkbarajzolható, akkor a lapokat határoló élek számának az összege, az élek számának a kétszeresével egyenlő

∑ti=1 =2e

Biz: minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot kétszer. Így minden élt 2 ször számolunk meg amikor laponként a lapok oldalainak számát számoljuk.

**Ha G gráf SR akkor: n+t=e+k+1**

BIZ:

Tfh G-nek n csúcsa van, az éleket még nem húztuk be. Ekkor 1 tartománya van, és n komponense, tehát az egyenlet áll.

Ha elkezdjük behúzni az éleket akkor az élhozzáadási lemma szerint 2 dolog történhet:

1, 2 olyan csúcsot kötünk össze amik nem voltak 1 komponensen belül, tehát 1 komponenssel kevesebb lesz, de 1 éllel több, az egyenlet nem változik.

2, olyan csúcsokat kötünk össze, amik 1 komponensen belül voltak, tehát lesz 1 kör, ami a tartományok és az élek számát növeli, tehát az egyenlet még mindig áll.

**Euler féle poliédertétel: n+t=e+2**

BIZ: poliéderről beszélünk ami összefüggő tehát k=1.